第6講　数列

1　自然数 n に対して，不等式 $0 \leqq a \leqq 2b \leqq c \leqq n$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を $P(n)$ とする．

(1)　$P(5)$ を求めよ．

(2)　n が奇数のとき，$P(n)$ を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 数列 $\{a_n\}$ があって，すべての n について，初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和が $\left(a_n+\dfrac{1}{4}\right)^2$ に等しいとする．

(1) a_n がすべて正とする．一般項 a_n を求めよ．

(2) 最初の 100 項のうち，1 つは負で他はすべて正とする．a_{100} を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　複素数　$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{7}\,i}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{7}\,i}{2}$　について(1)と(2)を証明せよ．

(1)　すべての正の整数 n に対して次の等式が成り立つ．

$$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=\alpha^n+\beta^n-2(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

(2)　すべての正の整数 n に対して $\alpha^n+\beta^n$ は奇数である．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

1　自然数nに対して，不等式$0\leqq a\leqq 2b\leqq c\leqq n$を満たす整数の組$(a, b, c)$の個数を$P(n)$とする．

(1)　$P(5)$を求めよ．

(2)　nが奇数のとき，$P(n)$を求めよ．

(1)　$n=5$のとき　$0\leqq a\leqq 2b\leqq c\leqq 5$

$b=0$のとき　$a=0$，$0\leqq c\leqq 5$

これを満たす整数の組(a, c)の個数は6個

$b=1$のとき　$0\leqq a\leqq 2$，$2\leqq c\leqq 5$

これを満たす整数の組(a, c)の個数は　$3\times 4=12$（個）

$b=2$のとき　$0\leqq a\leqq 4$，$4\leqq c\leqq 5$

これを満たす整数の組(a, c)の個数は　$5\times 2=10$（個）

以上より　$P(5)=6+12+10=\mathbf{28}$

(2)　$n=2m-1$　(mは自然数)とすると，$m=\dfrac{n+1}{2}$

$b=k$のとき　$0\leqq a\leqq 2k$，$2k\leqq c\leqq 2m-1$

これを満たす整数の組(a, c)の個数は　$(2k+1)(2m-2k)$（個）

また，$0\leqq 2b\leqq n$　より　$0\leqq 2k\leqq 2m-1$

よって　$P(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}2(2k+1)(m-k)$

$$=2m+2\sum_{k=1}^{m-1}\{-2k^2+(2m-1)k+m\}$$

$$=2m+2\times\left\{-2\cdot\frac{1}{6}m(m-1)(2m-1)+(2m-1)\cdot\frac{1}{2}m(m-1)+m(m-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}m\{6-2(m-1)(2m-1)+3(2m-1)(m-1)+6(m-1)\}$$

$$=\frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\left(2\cdot\frac{n+1}{2}+1\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列$\{a_n\}$があって，すべてのnについて，初項a_1から第n項a_nまでの和が$\left(a_n+\frac{1}{4}\right)^2$に等しいとする．

(1)　a_nがすべて正とする．一般項a_nを求めよ．

(2)　最初の100項のうち，1つは負で他はすべて正とする．a_{100}を求めよ．

$S_n=\left(a_n+\frac{1}{4}\right)^2$ とおく

(1)　$a_1=S_1=\left(a_1+\frac{1}{4}\right)^2$

$$a_1{}^2+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{16}-a_1=0 \qquad \left(a_1-\frac{1}{4}\right)^2=0 \qquad \text{よって}\quad a_1=\frac{1}{4}\quad (>0)$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(a_n+\frac{1}{4}\right)^2-\left(a_{n-1}+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(a_n-\frac{1}{4}\right)^2-\left(a_{n-1}+\frac{1}{4}\right)^2=0$$

$$(a_n+a_{n-1})\left(a_n-a_{n-1}-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots①$$

a_nはすべて正より　$a_n\neq -a_{n-1}$　　よって　$a_n=\frac{1}{4}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}}$

(2)　(1)の①より　$a_n=-a_{n-1}$　……②　または　$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}$　……③

題意を満たすのは次の2通り．

(i)　a_1からa_{99}までがすべて正，a_{100}のみ負のとき

$n=2$から$n=99$まで③が成り立つ．　　よって　$a_{99}=\frac{1}{2}\cdot 99-\frac{1}{4}=\frac{197}{4}$

$n=100$で②が成り立つ．

よって　$a_{100}=-a_{99}=\mathbf{-\frac{197}{4}}$

(ii)　a_2からa_{99}までのうち，1つだけ負，あとはすべて正のとき

$$a_{k+1}=-a_k,\quad a_{k+2}=-a_{k+1}$$

つまり，$a_{k+2}=a_k$が$1\leqq k\leqq 98$のある1つのkで成り立ち，$n=k,\ k+1,\ k+2$以外のnでは③が成り立つ．

ゆえに，a_{100}は③のa_{98}に等しい．

よって　$a_{100}=\frac{1}{2}\cdot 98-\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{195}{4}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　複素数　$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{7}\,i}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{7}\,i}{2}$　について(1)と(2)を証明せよ.

(1)　すべての正の整数 n に対して次の等式が成り立つ.

$$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=\alpha^n+\beta^n-2(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

(2)　すべての正の整数 n に対して $\alpha^n+\beta^n$ は奇数である.

(1)　$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$ より

α, β は２次方程式 $x^2-x+2=0$ の２解である.

よって　$\alpha^2-\alpha+2=0$　　$\alpha^2=\alpha-2$　　$\alpha^{n+1}=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$

同様に　$\beta^{n+1}=\beta^n-2\beta^{n-1}$

ゆえに　$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=\alpha^n+\beta^n-2(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

(2)　すべての正の整数 n に対し

「$\alpha^n+\beta^n$ は奇数」……(※)を示す.

〔Ⅰ〕　$n=1$ のとき　$\alpha+\beta=1$

$n=2$ のとき　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-3$

よって, (※)は $n=1, 2$ のとき成り立つ.

〔Ⅱ〕　$n=k$, $k+1$ のとき　(※)が成り立つと仮定する.

つまり, $\alpha^k+\beta^k$, $\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ がともに奇数であるとき

(1)より　$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-2(\alpha^k+\beta^k)=$(奇数)$-$(偶数)$=$(奇数)

よって, $n=k+2$ のときも(※)は成り立つ.

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より, すべての自然数 n で(※)は成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は $\dfrac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$n\geqq 2$ とする．このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n，b_n，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$\{b_n\}$ が初項 $b_1=p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n，p，q を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して $0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$ を満たしているとする．
このとき，すべての正の整数 n に対して $a_n = 0$ であることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

名大数学ⅠAⅡB　第６講　数列　練習問題　解答

1　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は $\dfrac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$n\geqq 2$ とする．このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n，b_n，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$\{b_n\}$ が初項 $b_1=p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n，p，q を用いて表せ．

解答例

(1)　$\dfrac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1$　……①

注意すべきは，①の n を $n-1$ に換えた時，左辺は n が $n-1$ に変わるだけであるが，右辺は個数が n 個から $n-1$ 個に減るということ．

$n\geqq 2$ のとき

$\dfrac{(n-1)n}{2}b_{n-1}=a_{n-1}+2a_{n-2}+3a_{n-3}+\cdots\cdots+(n-1)a_1$　……②

①，②を辺々引くと ←「和から一般項」の基本手法

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n-\frac{(n-1)n}{2}b_{n-1}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots\cdots+a_1$$

よって

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}b_n-\frac{(n-1)n}{2}b_{n-1}}$$

(2)　$b_n=p+(n-1)q$

$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}\{p+(n-1)q\}-\frac{(n-1)n}{2}\{p+(n-2)q\}$$
$$=pn+\frac{3}{2}q(n-1)n$$

①より $a_1=b_1=p$

したがって　$a_n=\left\{pn+\dfrac{3}{2}q(n-1)n\right\}-\left\{p(n-1)+\dfrac{3}{2}q(n-2)(n-1)\right\}$

$=p+3q(n-1)$　$(n\geqq 2)$

この式は $n=1$ のときも成り立つ．

よって　$\boldsymbol{a_n=p+3q(n-1)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列$\{a_n\}$は，すべての正の整数nに対して$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$を満たしているとする．このとき，すべての正の整数$n$に対して$a_n=0$であることを示せ．

解答例

$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$　……① がすべての正の整数nで成り立つとき

「すべての正の整数nで$a_n=0$」……(※)であることを示す．

〔Ⅰ〕 $n=1$のとき

①より　$0 \leqq 3a_1 \leqq a_1$

$0 \leqq 3a_1$より　$a_1 \geqq 0$　　$3a_1 \leqq a_1$より　$a_1 \leqq 0$　　よって　$a_1=0$

したがって，(※)は成り立つ．

〔Ⅱ〕 $n \leqq i$（iは自然数）を満たすすべての正の整数nで(※)が成り立つと仮定する．

ある1つの項で成り立つことの仮定ではなく，それまでのすべての項で成り立つことを仮定する．

$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_i=0$

$n=i+1$のときを考える．

①で，$n=i+1$のとき

$$0 \leqq 3a_{i+1} \leqq \sum_{k=1}^{i+1} a_k = a_1+a_2+\cdots\cdots+a_i+a_{i+1}=a_{i+1}\ \text{（仮定より）}$$

したがって　$0 \leqq 3a_{i+1} \leqq a_{i+1}$　　〔Ⅰ〕同様　$a_{i+1}=0$

よって，$n=i+1$のときも(※)は成り立つ．

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より，すべての正の整数nに対して$a_n=0$である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。